Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

Examen Graduado de Aprovechamiento: Topología
Fecha: 9 de octubre de 2003

Escoja exactamente **tres** de los siguientes cinco problemas.
Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. (a) Sean

$$\begin{aligned} A &= [0,1] \\ B &= (0,1) \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2=1\} \\ E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}. \end{aligned}$$

Cada uno dotado de la topología relativa como subespacio de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, según sea el caso. Explique, porqué ninguno de los espacios es homeomorfo a ningún otro.

(b) Demuestre que el borde de un triángulo equilátero, en $\mathbb{R}^2$, es homeomorfo al espacio $(C, \mathcal{T}_C)$ de la parte (a).

2. Demuestre que la topología producto $\mathcal{T}_\Pi$, es la topología más pequeña sobre $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ que hace que cada una de las proyecciones $\pi_{\alpha_0} : X \to X_{\alpha_0}$ sea una función continua.

3. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio conexo, compacto y Hausdorff. Demuestre que si X tiene por lo menos dos puntos, entonces X no es enumerable.

4. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea X_α un espacio topológico no vacío. Sea $(X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathcal{T}_\Pi)$ el espacio producto.

   (a) Demuestre que si X_α es compacto para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $(X, \mathcal{T}_\Pi)$ es compacto.

   (b) Demuestre que si X_α es Hausdorff para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $(X, \mathcal{T}_\Pi)$ es Hausdorff.

   (c) ¿Será cierto que si X_α es metrizable para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $(X, \mathcal{T}_\Pi)$ es metrizable?

5. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida según indicamos a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ x+1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Demuestre que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}^1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}^1})$ no es continua.

   (b) Demuestre que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$, donde $\mathcal{T}_l$ es la topología de límites inferiores, es continua.

(**Nota**. Aquí $\mathcal{T}_{\mathcal{E}^1}$ es la topología usual sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_l$ es la topología generada por la base $\mathfrak{B} = \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$).