Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

Examen Graduado de Aprovechamiento: Topología
Fecha: 2 de mayo de 2003

Escoja exactamente **tres** de los siguientes cinco problemas.
Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. (a) Sean $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathfrak{B}_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(a,b) - A \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$. Demuestre que $\mathfrak{B}$ es una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre los reales $\mathbb{R}$.

   (b) Si $\mathcal{T}_{\mathcal{E}^1}$ es la topología usual de los números reales, ¿como comparan, si son comparables, $\mathcal{T}_{\mathcal{E}^1}$ y $\mathcal{T}$? ¿cuál es más grande? Explique.

2. Sea A un subconjunto del espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

   (a) $int(\overline{A}) = \varnothing$.

   (b) $X - \overline{A}$ es denso en X.

   (c) $X - \overline{(X - \overline{A})} = \varnothing$.

   (d) $A \subseteq \overline{(X - \overline{A})}$.

3. Un subconjunto de un espacio topológico es un **conjunto-**G_δ, si es la intersección de una cantidad enumerable de conjuntos abiertos. Por otro lado, un subconjunto de un espacio topológico es un **conjunto-**F_σ, si es la unión de una cantidad enumerable de conjuntos cerrados.

   (a) Sea A un conjunto-F_σ del espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$. Demuestre que hay una sucesión anidada $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \cdots$ de conjuntos cerrados tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

   (b) Demuestre que todo conjunto cerrado en un espacio métrico (X, d) es un conjunto-G_δ.

4. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico Hausdorff. Suponga que $f, g : X \to Y$ son funciones continuas.

   (a) Suponga que $A \subseteq X$ es no vacío y que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$. Demuestre que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$.

   (b) Sea $B = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Demuestre que B es cerrado.

5. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Demuestre que el espacio producto $(X, \mathcal{T}_\Pi)$ es regular $\Longleftrightarrow$ $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ es regular para cada $\alpha \in \Lambda$.