UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO DE RIO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Examen Graduado de Estadísticas
30 de noviembre de 2004

SE CORREGIRAN LOS TRES MEJORES PROBLEMAS

1. Sea $S = X_1 + \cdots + X_n$ una variable aleatoria binomial con parámetros $\theta = P(X_i = 1)$ $i = 1, \cdots, n$ (desconocido) y $n = 25$. Suponga una distribución a priori Uniforme para θ. Se observa $S = 10$.
   (a) Calcule la distribución a posteriori de θ.
   (b) Para función de pérdida cuadrática $(\theta - d(X))^2$, ¿cuál es el estimador óptimo $d^*(X)$, de θ?

2. $X_1 \cdots X_n$ es una muestra aleatoria normal con media μ y varianza conocida σ_0^2. Sean las hipótesis nula y alternativa.

$$H_0 : \mu = 1 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \mu = 3$$

   (a) Enuncie y utilice el lema de Neyman-Pearson para obtener el test óptimo al nivel $\alpha = 5\%$.
   (b) ¿Cuál es la decisión para $\bar{x} = 1.5$, para: tamaños de muestra $n = 5$ y para $n = 500$.

3. Suponga que X_i sigue la distribución exponencial, $i = 1, 2, \cdots n$

$$f(x \mid \beta) = \beta e^{-\beta x} \; ; \quad \beta > 0, \quad x > 0$$

   Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria de tamaño n.

   (a) Encuentre el estimador máximo verosímil para β. Evalúelo si $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 6$, $n = 3$.

(b) Encuentre la función de distribución de x, $F(x \mid \beta)$, y encuentre el estimador máximo verosímil de $P_r(X < 5 \mid \beta)$.

4. K es una variable aleatoria que sigue la distribución de Poisson

$$P(K = k \mid \lambda) = e^{-\lambda} \, \frac{\lambda^k}{k!} \;, \quad \begin{array}{rcl} \lambda & > & 0 \\ k & = & 0, 1, 2 \ldots \end{array}$$

Observamos: $k_1, k_2, \cdots, k_n$

(a) Demuestre que esta distribución pertenece a la familia exponencial.

(b) Encuentre el estimador máximo verosímil de λ.

5. Para el ejercicio 4

(a) Encuentre la densidad a priori no informativa para λ de Jeffreys.

(b) Para esa densidad a priori encuentre la distribución a posteriori de λ.