UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO - RECINTO DE RIO PIEDRAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y CIENCIA DE COMPUTOS

EXAMEN GRADUADO DE APROVECHAMIENTO

ESTADISTICA

Jueves 2 de noviembre de 2000

La calificación del examen se otorgará en base a los mejores tres problemas contestados. Es decir, se corregirán únicamente tres problemas. Todas las respuestas deben estar justificadas de alguna forma.

Problema I.

1. Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria de tamaño $n = 2$ de una distribución con densidad uniforme $f(x;\theta) = U_{[0,\lambda]}(x) = \frac{1}{\lambda}$ si $0 < x < \lambda$, y cero en otro caso, donde $\lambda > 0$. La hipótesis $H_0 : \lambda = 1$ es rechazada y $H_a : \lambda = 2$ es aceptada si la muestra cae en la región $X_1 + X_2 \geq \frac{3}{2}$. Determine la función de potencia del test en términos del parámetro .

2. Se trata de estudiar si los siguientes datos provienen de una distribución de Poisson.

X	0	1	2	3
n_i	300	400	200	100

a) Desarrolle una prueba de hipótesis con este fin y halle el p-value de la estadística utilizada en la prueba.
b) ¿Cuál es la conclusión para un nivel de significación $\alpha = .01$.

3. a) Defina (a cabalidad) el concepto estadístico de *consistencia.*
b) Sea Y_n una estadística (dependiente del tamaño n de la muestra) tal que $\lim_{n\to\infty} E(Y_n) = \theta$ and $\lim_{n\to\infty} \sigma^2(Y_n) = 0$. Demuestre que Y_n es un estimador consistente de θ.

Problema II.

1. Enuncie y demuestre el *Teorema de Neyman-Pearson (para determinar la mejor prueba para hipótesis simples).*

Problema III.

1. Sean $X_1 < X_2 < \cdots < X_5$ una muestra aleatoria (ordenada) de tamaño 5 obtenida de una distribución con función de distribución acumulativa $F(x;\theta) = 1 - e^{-2\theta x}$, para $0 < x < \infty$, y cero en otro caso, donde $\theta > 0$. Encuentre el test *tasa (o cociente) de verosimilitud* λ para probar las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ versus $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

2. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal $N(\lambda, 1)$.
a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud del 40-percentilo de dicha distribución .
b) Si k es cualquier constante, encuentre el estimador de máxima verosimilitud de $P(X \geq k)$.

3. Un recipiente contiene cinco canicas de las cuales θ son rojas y las otras son azules. Para probar la hipótesis nula $\theta = 3$ contra la alternativa $\theta = 5$, se extraen al azar y sin reemplazo tres canicas. Se rechaza la hipótesis nula si y sólo si la mayoría es roja. Determine la potencia de esta prueba.

Problema IV.

1. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución de Binomial(n, p).Encuentre

el estimador máximo verosimil de p.

2. a) Defina (a cabalidad) el concepto de eficiencia para estimadores.
b) En relación a la parte 1. de este problema, ¿es dicho estimador eficiente? Justifique su respuesta a cabalidad.

3. a) Defina (a acabalidad) el concepto de suficiencia para estimadores.
b) En relación a la parte 1. de este problema, ¿es dicho estimador suficiente? Justifique su respuesta a cabalidad.

Problema V.

1. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son desconocidos.
a) La estadística cS^2, donde c es una constante y S^2 es la varianza muestral, tiene una distribución conocida. ¿Cuál es el valor de esa constante, y cuál es la distribución de dicha estadística?
b) Usando la respuesta de a) DESCRIBA cómo construir un intervalo de confiabilidad $(1-\alpha)x100\%$ para σ^2.

(No basta con escribir la fórmula del intervalo, debe indicar el proceso mediante el cual se obtiene dicha fórmula)

2. Calcule la probabilidad $P(\sum_{i=1}^{20}(X_i - \overline{X})^2 < 10.85\sigma^2)$.

3. Se ha tomado una muestra de tamaño 8 de una población normal obteniéndose una media igual a 3 unidades y una varianza de 2 unidades^2. Construya un intervalo de confianza (del 95%) para la desviación estandard σ de una población.