University of Puerto Rico, Rio Piedras Campus
Faculty of Natural Sciences
Department of Mathematics

Comprehensive Probability Test

Tuesday, June 3, 2005

Escoja *una* pregunta de cada grupo y resuélvala. Justifique completamente todas sus respuestas. Cada ejercicio tiene una ponderación de 5 puntos.

Grupo I.

1. Una máquina tiene tres partes que pudieran fallar en un lapso t de tiempo, en cuyo caso deben ser reemplazadas. La probabilidad de que falle la parte A, la parte B, y la parte C en ese lapso de tiempo está dada por 0.17, 0.12 y 0.05, respectivamente. Si las fallas de estas partes son mutuamente independientes (i.e., independientes unas de otras), ¿cuál es la probabilidad de que a lo más dos de ellas fallen en ese lapso de tiempo?

2. Tres cartas se extraen sin reemplazo de un mazo de cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera carta extraída sea una de corazones?

Grupo II.

3. Un vendedor por teléfono logra hacer una venta por cada seis llamadas. ¿Cuál es la probabilidad de que su cuarta venta ocurra en la decimoquinta llamada?

4. El número de peces que un pescador logra pescar en una hora en un río es una variable aleatoria con distribución de Poisson con media Encuentre las probabilidades de que pesque:
a) cuatro peces en 2 horas,

b) por lo menos dos peces en 3 horas,

c) no más de tres peces en 4 horas.

Grupo III.

5. Encuentre la función generatriz de momentos de una distribución binomial negativa haciendo uso del hecho que si k variables aleatorias independientes tienen distribución geométrica con el mismo parámetro θ, entonces su suma es una variable aleatoria con distribución binomial negativa con parámetros θ y k.

6. Para cierto trayecto, una línea aérea usa aviones con capacidad para 220 pasajeros y observa que en muchos de esos viajes hay asientos vacíos porque, de acuerdo con las estadísticas de la compañía, el 10% de las personas que compra un pasaje no viaja. De modo que la compañía quiere vender más pasajes que la cantidad de asientos disponibles pero con la condición de que por lo menos 19 de cada 20 pasajeros que compren un pasaje para un vuelo encuentren asiento disponible. ¿Cuántos pasajes debe vender la línea aérea para cada uno de estos vuelos.

Grupo IV.

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria (i.e., copias independientes y con la misma distribución) de una distribución *uniforme* en el intervalo $(0, \theta)$, donde $\theta > 0$. Sean $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ los valores de la muestra ordenados de menor a mayor. Encuentre las distribuciónes de las siguientes variables:
a) $X_{(n)} = \max\{X_i\}$

b) $X_{(2)}$

8. Una variable aleatoria continua X tiene una función de densidad dada por las siguientes expresiónes analíticas:
$\frac{x}{\lambda^2}$ si $0 \le x \le \lambda$, y $\frac{2\lambda - x}{\lambda^2}$ si $\lambda \le x \le 2\lambda$.

Encuentre el valor de t tal que $P[t\lambda \le X \le (2-t)\lambda] = 0.80$

Grupo V.

9. The length of rods produced by a machine are normally distributed with mean 4 units and standard deviation 2. Find the density function for X, the length of rods actually produced, that is *disregarding negative values of X*.

10. Si $f(x, y) = 6x$, para $0 < x < y < 1$ y 0 en otro lado, encuentre
a) $f_X(x)$,

b) $E(Y \mid X = x)$

Grupo VI.

11. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0,2]$.
a) Encuentre la función generatriz de momentos $M_{X+2Y}(t)$ de la variable $Z = X + 2Y$.

b) Encuentre $Var(Z)$. Use la respuesta encontrada en a). (Si no lo hace así su respuesta no será tenida en cuenta)

c) Encuentre $P(|Z| < 1)$. (Puede usar métodos geométricos si así lo desea.)

d) Find a non-null lower bound for $P(|Z - \mu_z| < 2\sigma_z)$.

12. *Sea X* como en el ejercicio 8. Se escoge una única observación x de dicha distribución, para la cual el valor de λ es desconocido. Para qué valores de λ queda x entre $t\lambda$ y $(2-t)\lambda$ con probabilidad 0.80.